

# Physique des Marchés

## Introduction : Faits stylisés

Ioane Muni Toke

Ecole Centrale Paris  
Option Mathématiques Appliquées  
Majeure Mathématiques Financières

15 février 2011

# Introduction

- Modélisation stochastique / probabiliste
- Inadéquation avec les observations empiriques
- Données empiriques, informatisation, haute-fréquence
- Microstructure, “éconophysique”

# Données financières

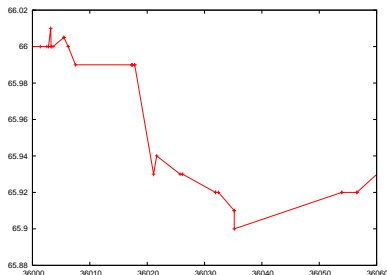
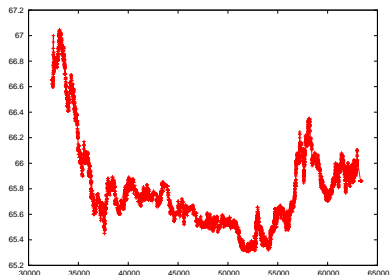
Date	Time stamp	Price	Quantity	Flag
2010-03-09	36000.309	56.15	20	
2010-03-09	36001.143	56.17	80	
2010-03-09	36001.143	56.17	420	
2010-03-09	36001.436	56.14	117	
2010-03-09	36001.651	56.14	150	
2010-03-09	36001.651	56.14	231	
2010-03-09	36001.651	56.14	1000	
2010-03-09	36003.523	56.14	150	
2010-03-09	36003.523	56.14	150	
2010-03-09	36003.698	56.14	150	
2010-03-09	36003.698	56.14	189	
2010-03-09	36003.698	56.14	231	
2010-03-09	36003.75	56.14	102	

Date	Time stamp	Side	Level	Price	Quantity
2010-03-09	36000.335	B	3	56.12	100
2010-03-09	36000.335	B	3	56.12	200
2010-03-09	36000.335	A	2	56.19	700
2010-03-09	36000.335	B	3	56.12	100
2010-03-09	36000.335	A	2	56.19	600
2010-03-09	36000.335	A	2	56.19	400
2010-03-09	36000.335	A	2	56.19	500
2010-03-09	36000.349	A	2	56.19	400
2010-03-09	36000.352	B	3	56.12	200
2010-03-09	36000.454	B	2	56.13	133
2010-03-09	36001.034	B	2	56.13	425
2010-03-09	36001.149	A	1	56.17	1361
2010-03-09	36001.149	A	1	56.17	941

**Figure:** Extraits de fichiers de données “trades” (gauche) et “quotes” (droite) pour le titre BNP Paribas.

⇒ bid, ask, mid, last, ... : quel prix ?

# Echelle d'observation



**Figure:** (Haut) Valeur du titre BNPP.PA pour la période 2003-2011 (Source: finance.yahoo.com). (Bas) Prix de transactions pour le titre BNPP.PA le 27 mai 2008. Journée entière (gauche) et zoom sur une minute à 10h00 (droite).

# Plan de la séance

- 1 Distribution des rendements
  - Observations empiriques
  - Quelques distributions utiles
  - Exemples de calibration
- 2 Corrélation des rendements et volatilité
  - Observations empiriques
  - Marche aléatoire et théorème central limite
  - Subordination et changement de temps
- 3 Volatilité et corrélations en haute-fréquence
  - Volatilité et “signature plots”
  - Corrélation et effet Epps

# Plan de la séance

- 1 Distribution des rendements
  - Observations empiriques
  - Quelques distributions utiles
  - Exemples de calibration
- 2 Corrélation des rendements et volatilité
  - Observations empiriques
  - Marche aléatoire et théorème central limite
  - Subordination et changement de temps
- 3 Volatilité et corrélations en haute-fréquence
  - Volatilité et “signature plots”
  - Corrélacion et effet Epps

# Plan de la séance

- 1 Distribution des rendements
  - Observations empiriques
  - Quelques distributions utiles
  - Exemples de calibration
- 2 Corrélation des rendements et volatilité
  - Observations empiriques
  - Marche aléatoire et théorème central limite
  - Subordination et changement de temps
- 3 Volatilité et corrélations en haute-fréquence
  - Volatilité et "signature plots"
  - Corrélation et effet Epps

# Rendements financiers

- On note  $p$  le prix d'un actif financier.
- On définit le rendement à la date  $t$  sur la période  $\tau$  par:

$$r_\tau(t) = \frac{p(t) - p(t - \tau)}{p(t - \tau)} \quad (1)$$

- Incréments, rendements et log-rendements:

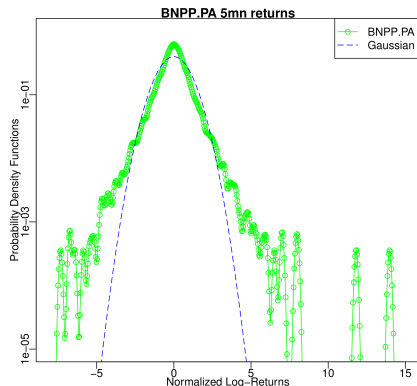
$$\delta_\tau p(t) = p(t) - p(t - \tau) \quad (2)$$

$$r_\tau(t) = \frac{p(t)}{p(t - \tau)} - 1 \sim \ln(p(t)) - \ln(p(t - \tau)) \quad (3)$$

- Approximation:  $\ln 1.01 \approx 9.95 \times 10^{-3}$ ,  $\ln 1.10 \approx 9.53 \times 10^{-2}$
- Cadre de Black & Scholes:  $r \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu\tau, \sigma\sqrt{\tau})$

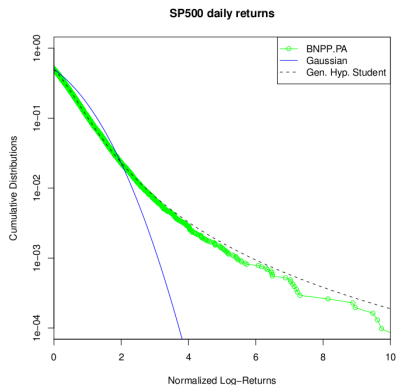


# Distributions empiriques des rendements (I)



**Figure:** Distribution des log-rendements normalisés pour une période d'échantillonnage  $\tau = 5$  minutes pour le titre BNP Paribas pour la période 01/01/2007 - 30/05/2008.

# Distributions empiriques des rendements (II)



**Figure:** Distribution des log-rendements journaliers normalisés de l'indice SP500 pour la période 1950-2009. Source des données: [finance.yahoo.com](http://finance.yahoo.com)

# Plan de la séance

- 1 Distribution des rendements
  - Observations empiriques
  - **Quelques distributions utiles**
  - Exemples de calibration
- 2 Corrélation des rendements et volatilité
  - Observations empiriques
  - Marche aléatoire et théorème central limite
  - Subordination et changement de temps
- 3 Volatilité et corrélations en haute-fréquence
  - Volatilité et “signature plots”
  - Corrélacion et effet Epps

# Lois normale et log-normale (I)

- Loi normale  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$

$$f_{\mathcal{N}}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4)$$

Décroissance en  $e^{-x^2}$  très rapide:

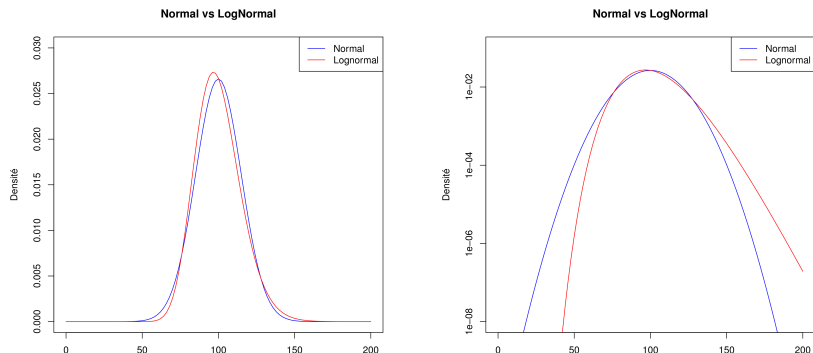
$$P(|X| > 3\sigma) < 0.2\%, \quad (5)$$

$$P(|X| > 10\sigma) < 2.10^{-23} \quad (6)$$

- Loi log-normale  $\ln \mathcal{N}$ :  $\ln X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

$$f_{\ln \mathcal{N}}(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (7)$$

# Lois normale et log-normale (II)



**Figure:** Comparaison des lois normale et log-normale de (log-)moyenne 100 et (log-)écart-type 15 en échelle linéaire (gauche) et linéaire-log (droite).

⇒ Bachelier vs. Black & Scholes ...

# Lois $\alpha$ -stables (I)

- Lois de Lévy /  $\alpha$ -stable  $\mathcal{L}(\alpha)$  (queues de Pareto)

$$f_{\mathcal{L}(\alpha)}(x) \sim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha A_{\pm}^{\alpha}}{|x|^{1+\alpha}} \quad (8)$$

- Symétrie :  $\beta = \frac{A_{+}^{\alpha} - A_{-}^{\alpha}}{A_{+}^{\alpha} + A_{-}^{\alpha}} \in [-1, 1]$
- Fonction caractéristique d'une loi stable symétrique centrée :

$$\Phi_{\mathcal{L}}(t) = \exp(-C_{\alpha}|t|^{\alpha}), \quad C^{\alpha} \propto A^{\alpha} \text{ constante} \quad (9)$$

- Si  $\alpha < 2$ ,  $\text{Var}[X] = +\infty$
- Si  $\alpha \leq 1$ , même la moyenne n'est pas définie
- Cas particulier  $\alpha = 1$ : Cauchy  $f_{\mathcal{L}(1)}(x) = \frac{A}{x^2 + \pi^2 A^2}$
- Cas particulier  $\alpha = 2$ : Gaussienne  $f_{\mathcal{L}(2)}(x) = f_{\mathcal{N}(0, \sigma)}(x)$

# Lois $\alpha$ -stables (II)

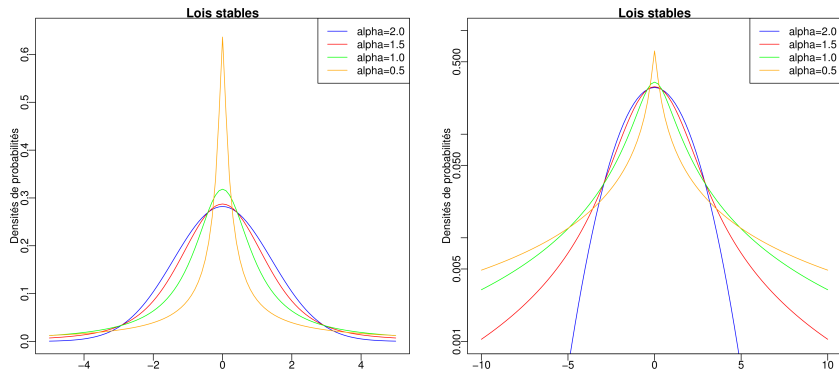


Figure: Densités de probabilités des lois stables pour  $\alpha = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ , en échelle linéaire (gauche) et linéaire-log (droite).

# Loi de Student (I)

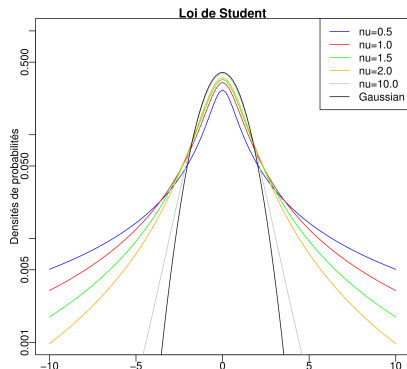
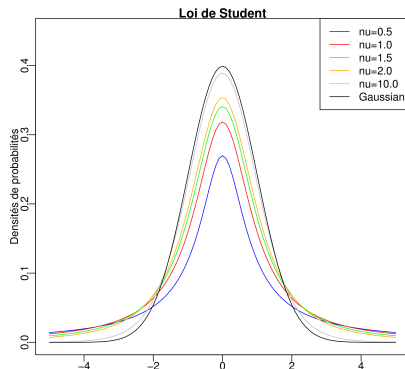
- Densité de probabilité de  $\mathcal{S}(\nu)$

$$f_{\mathcal{S}}(x) = \frac{1}{\sqrt{\nu\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{1+\nu}{2}} \quad (10)$$

- Queues de distribution en loi puissance
- Convergence en loi vers la loi normale pour  $\nu \rightarrow +\infty$
- Si  $\nu \leq 2$ , la variance n'est pas définie



# Loi de Student (II)



**Figure:** Densité de probabilités de la loi de Student pour  $\nu = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 10$  et  $+\infty$ , en échelle linéaire (gauche) et linéaire-log (droite).

## Autres distributions utiles

- Loi gamma inverse  $i\Gamma$

$$f_{i\Gamma}(x) = \frac{x_0^\alpha}{\Gamma(\alpha)x^{1+\alpha}} \exp\left(\frac{-x_0}{x}\right) \quad (11)$$

Variable positive, queues de distribution en loi puissance

- Loi hyperbolique  $\mathcal{H}$

$$f_{\mathcal{H}}(x) = \frac{1}{2x_0 B(\alpha x_0)} \exp\left(-\alpha\sqrt{x_0^2 + x^2}\right) \quad (12)$$

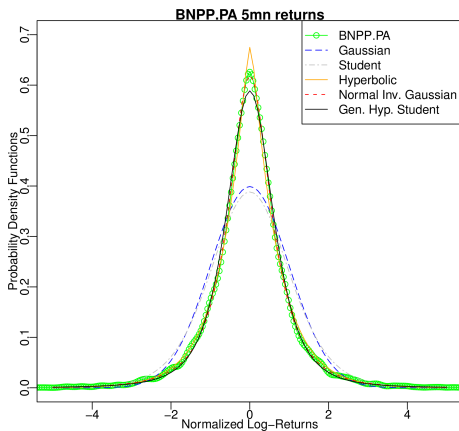
Queues de distribution exponentielles

- et beaucoup de lois composées: Student hyperbolique, Lévy tronquées,...

# Plan de la séance

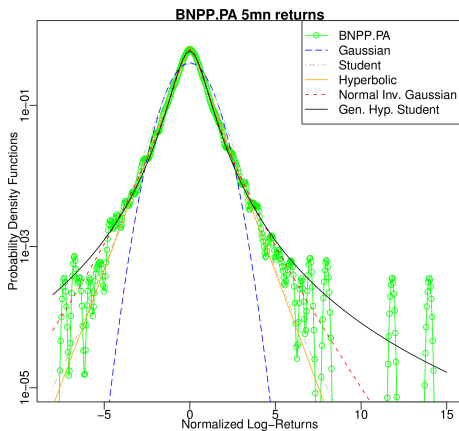
- 1 Distribution des rendements
  - Observations empiriques
  - Quelques distributions utiles
  - Exemples de calibration
- 2 Corrélation des rendements et volatilité
  - Observations empiriques
  - Marche aléatoire et théorème central limite
  - Subordination et changement de temps
- 3 Volatilité et corrélations en haute-fréquence
  - Volatilité et “signature plots”
  - Corrélation et effet Epps

# Calibration de quelques distributions (I)



**Figure:** Distribution des log-rendements normalisés pour une période d'échantillonnage  $\tau = 5$  minutes pour le titre BNP Paribas pour la période 01/01/2007 - 30/05/2008.

# Calibration de quelques distributions (II)



**Figure:** Distribution des log-rendements normalisés pour une période d'échantillonnage  $\tau = 5$  minutes pour le titre BNP Paribas pour la période 01/01/2007 - 30/05/2008.

# Influence de la fréquence d'échantillonnage

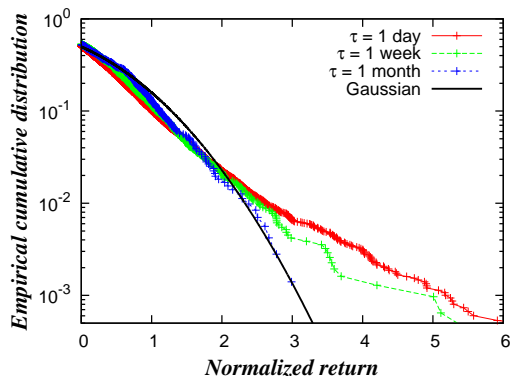


Figure: Distribution des log-rendements normalisés de l'indice SP500 pour la période 1950-2009, pour différentes périodes d'échantillonnage.

# Plan de la séance

- 1 Distribution des rendements
  - Observations empiriques
  - Quelques distributions utiles
  - Exemples de calibration
- 2 Corrélation des rendements et volatilité
  - Observations empiriques
  - Marche aléatoire et théorème central limite
  - Subordination et changement de temps
- 3 Volatilité et corrélations en haute-fréquence
  - Volatilité et "signature plots"
  - Corrélation et effet Epps

# Plan de la séance

- 1 Distribution des rendements
  - Observations empiriques
  - Quelques distributions utiles
  - Exemples de calibration
- 2 **Corrélation des rendements et volatilité**
  - **Observations empiriques**
  - Marche aléatoire et théorème central limite
  - Subordination et changement de temps
- 3 Volatilité et corrélations en haute-fréquence
  - Volatilité et "signature plots"
  - Corrélation et effet Epps



# Absence de corrélation des rendements

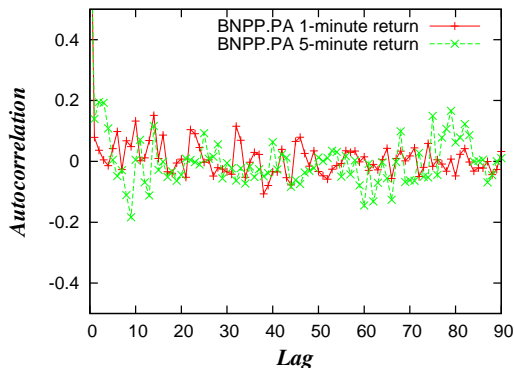


Figure: Autocorrélation des log-rendements pour le titre BNP Paribas pour la période 01/01/2007 - 30/05/2008.

# “Clustering” de volatilité

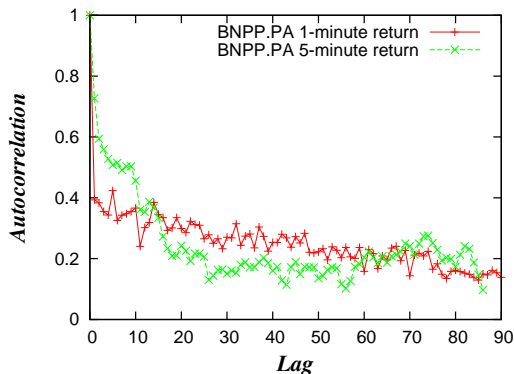


Figure: Autocorrélation des valeurs absolues des log-rendements pour le titre BNP Paribas pour la période 01/01/2007 - 30/05/2008.

# Mandelbrot (1963)

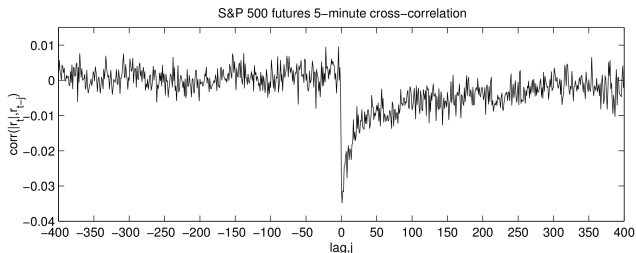
## Référence

**The Variation of Certain Speculative Prices**, Benoit Mandelbrot, *The Journal of Business*, Vol. 36, No. 4 (Oct., 1963), pp. 394-419

- “the empirical distributions of price changes are usually too “peaked” to be relative to samples from Gaussian populations”
- “large changes tend to be followed by large changes – of either sign – and small changes tend to be followed by small changes”

# Effet “leverage” de volatilité

Première observation par Black (1976) (Studies of stock price volatility changes, Proceedings of the 1976 Meetings of the American Statistical Association, pp. 177-181. Non consulté).



**Figure:** Corrélation des rendements et des valeurs absolues des log-rendements pour les futures S&P500 pour la période 1998-1999. Tiré de (Bollerslev et al., 2006).

# Plan de la séance

- 1 Distribution des rendements
  - Observations empiriques
  - Quelques distributions utiles
  - Exemples de calibration
- 2 **Corrélation des rendements et volatilité**
  - Observations empiriques
  - **Marche aléatoire et théorème central limite**
  - Subordination et changement de temps
- 3 Volatilité et corrélations en haute-fréquence
  - Volatilité et "signature plots"
  - Corrélation et effet Epps

# Marche aléatoire et TCL

Marche aléatoire pour le log-prix :

$$p_t = p_{t-1} + \epsilon_t \quad (13)$$

avec  $E[\epsilon_t] = 0$  et  $E[\epsilon_t \epsilon_s] = 0$  si  $t \neq s$

## Version classique

Soit  $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de variable aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de moyenne  $E[Y_i] = 0$  et de variance  $E[Y_i^2] = 1$ . Soit  $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ .

Alors la distribution de  $S_n/\sqrt{n}$  converge en loi vers la loi normale centrée réduite  $\mathcal{N}(0, 1)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

$\Rightarrow$  contradiction avec les résultats empiriques: quelle hypothèse doit-on abandonner ?

# Théorème Central Limite généralisé (Gnedenko et Kolmogorov, 1968)

## Une version simplifiée d'un TCL généralisé

Soit  $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de variable aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi dont la densité décroît en loi puissance  $|x|^{-(1+\alpha)}$ ,  $0 < \alpha < 2$ . Soit  $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ .

Alors il existe des constantes  $A_n > 0$  et  $B_n$  telles que la distribution de  $S_n/A_n - B_n$  converge en loi vers la loi stable  $\mathcal{L}(\alpha)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

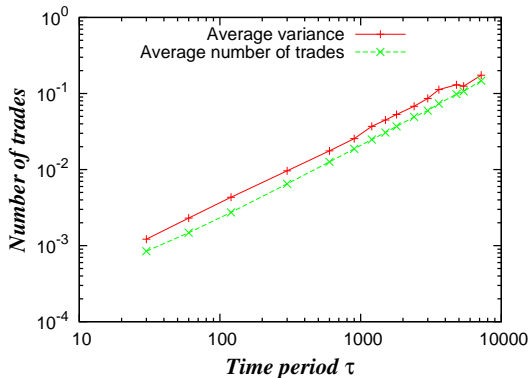
- Notion de domaine d'attraction
- Exemple de la loi de Student
- Notion de "scaling"
- Mandelbrot (1963) et le prix du coton

# Plan de la séance

- 1 Distribution des rendements
  - Observations empiriques
  - Quelques distributions utiles
  - Exemples de calibration
- 2 **Corrélation des rendements et volatilité**
  - Observations empiriques
  - Marche aléatoire et théorème central limite
  - **Subordination et changement de temps**
- 3 Volatilité et corrélations en haute-fréquence
  - Volatilité et “signature plots”
  - Corrélation et effet Epps



# Idée: variance et nombre de transactions



**Figure:** Variance des rendements et nombre de trades (divisé par  $10^4$ ) en fonction de la période d'échantillonnage (en secondes) pour le titre BNPP.PA sur la période 01/01/2007 - 28/05/2008.

# Subordination

## Définition

Soit  $(X(t))_{t \geq 0}$  un processus stochastique à valeur dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $(T(t))_{t \geq 0}$  un processus stochastique croissant à valeur dans  $\mathbb{R}_+$ . Alors  $X(T(t))$  est appelé *processus subordonné* de  $X$  et  $T(t)$  est appelé *processus directeur*.

## Théorème (Clark, 1973)

Si  $X$  est à accroissements indépendants et stationnaires centrés de variance  $\sigma^2$  et si  $T$  à accroissements indépendants et stationnaires positifs de moyenne  $\mu$ , indépendants de  $X$ ,  
Alors le processus subordonné  $X(T(t))$  est centré de variance  $\mu\sigma^2$ .

# Subordination par le nombre de transactions

## Référence

**Stochastic volatility of financial markets as the fluctuating rate of trading: An empirical study**, A. Christian Silva, Victor M. Yakovenko, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Volume 382, Issue 1, 1 August 2007, Pages 278-285.

- Processus directeur t.q.  $\xi N = \text{Var}_N[r]$
- Subordination gaussienne:

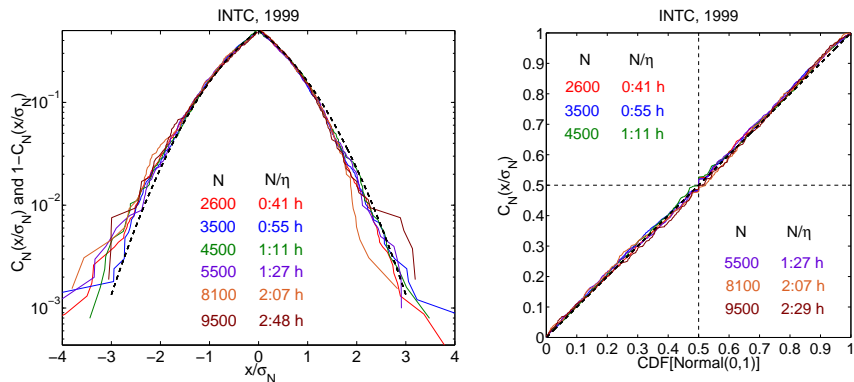
$$f_N(x) = \frac{1}{\sqrt{\xi N} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\xi N}\right) \quad (14)$$

- Distribution des rendements pour une période  $\tau$  par subordination:

$$f_\tau(x) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\xi N} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\xi N}\right) K_\tau(N) dN \quad (15)$$

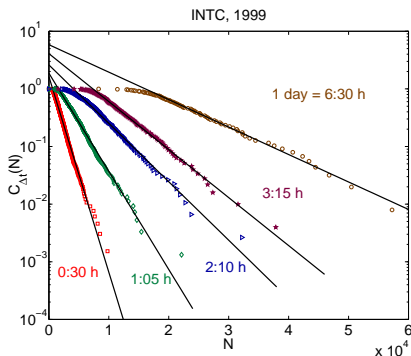
avec  $K_\tau(N)$  distribution du nombre de transactions sur une période  $\tau$

# Distribution des rendements en temps de transaction



**Figure:** Fonction de répartition des log-rendements normalisés après  $N$  transactions (gauche) et graphe paramétrique des quantiles empiriques et gaussiens (droite), pour le titre INTC (Intel) pour l'année 1999. Tiré de (Silva & Yakovenko, 2007).

# Distribution du nombre de transaction par intervalle de temps



**Figure:** Fonction de répartition du nombre de transactions  $N_{\tau}$  par période  $\tau$  pour le titre INTC (Intel) pour l'année 1999. Tiré de (Silva & Yakovenko, 2007).

# Distribution des rendements par subordination

- Distribution des rendements pour une période  $\tau$  par subordination:

$$f_{\tau}(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\xi N} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\xi N}\right) K_{\tau}(N) dN \quad (16)$$

- Distribution exponentielle du nombre de transaction par intervalle de temps

$$K_{\tau}(N) = \frac{e^{-N/\eta\tau}}{\eta\tau}, \quad \text{avec } \eta \text{ t.q. } E[N_{\tau}] = \eta\tau \quad (17)$$

- Distribution des rendements par subordination

$$f_{\tau}(x) \approx \frac{e^{-|x|\sqrt{2/\xi\eta\tau}}}{\sqrt{2\xi\eta\tau}} \quad (18)$$

Décroissance exponentielle

- Lien avec la volatilité stochastique

# Plan de la séance

- 1 Distribution des rendements
  - Observations empiriques
  - Quelques distributions utiles
  - Exemples de calibration
- 2 Corrélation des rendements et volatilité
  - Observations empiriques
  - Marche aléatoire et théorème central limite
  - Subordination et changement de temps
- 3 Volatilité et corrélations en haute-fréquence
  - Volatilité et “signature plots”
  - Corrélation et effet Epps

# Plan de la séance

- 1 Distribution des rendements
  - Observations empiriques
  - Quelques distributions utiles
  - Exemples de calibration
- 2 Corrélation des rendements et volatilité
  - Observations empiriques
  - Marche aléatoire et théorème central limite
  - Subordination et changement de temps
- 3 Volatilité et corrélations en haute-fréquence
  - Volatilité et "signature plots"
  - Corrélation et effet Epps



# Volatilité réalisée

- $p$  : prix logarithmique
- $r_\tau(j) = p(j\tau) - p((j-1)\tau)$  incréments des log-prix
- Cadre Black & Scholes / semi-martingales d'Itô :

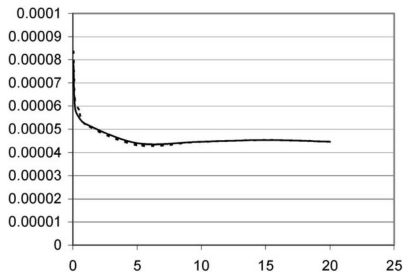
$$\int_0^T \sigma_u^2 du = \langle p \rangle_T = \lim_{\tau \rightarrow 0} \sum_{j=1}^{T/\tau} (p(j\tau) - p((j-1)\tau))^2 = \lim_{\tau \rightarrow 0} \sum_{j=1}^{T/\tau} r_\tau(j)^2 \quad (19)$$

- Estimateur "naturel" de la variance intégrée avec données intra-journalières

$$\hat{V}_R(\tau) = \sum_{j=1}^{T/\tau} r_\tau(j)^2 \quad (20)$$

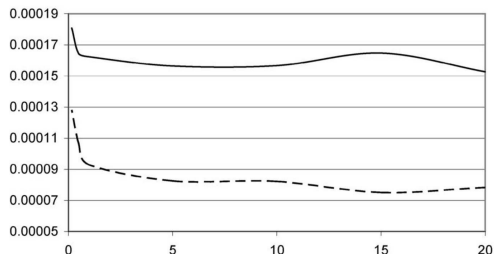
$\Rightarrow$  variance réalisée:  $\hat{V}_R(\tau) \rightarrow \langle p \rangle_T$  en probabilité quand  $\tau \rightarrow 0$

# Signature plot (I)



**Figure:** Volatilité réalisée en fonction de la période d'échantillonnage (en minutes) calculée à partir des prix *mid* du titre IBM sur le NYSE (trait plein) et NYSE+Midwest (pointillés) pour février 2002. Tiré de (Bandi & Russell, 2007).

## Signature plot (II)



**Figure:** Volatilité réalisée en fonction de la période d'échantillonnage (en minutes) calculée à partir des prix *mid* des titres Cisco (trait discontinu) et Microsoft (trait plein) pour février 2002. Tiré de (Bandi & Russell, 2007).

# Observations et microstructure

- Un modèle d'observation du prix logarithmique  $p^*$  semi-martingale,  $\eta$  bruit :  $p = p^* + \eta$  d'où :

$$r_\tau(j) = p^*(j\tau) - p^*((j-1)\tau) + \eta(j\tau) - \eta((j-1)\tau) \quad (21)$$

$$= r_\tau^*(j) + \epsilon_\tau(j) \quad (22)$$

- Volatilité réalisée :

$$\hat{V}_R = \sum_{j=1}^{T/\tau} r_\tau(j)^2 = \sum_{j=1}^{T/\tau} r_\tau^*(j)^2 + \sum_{j=1}^{T/\tau} \epsilon_\tau(j)^2 + 2 \sum_{j=1}^{T/\tau} r_\tau^*(j) \epsilon_\tau(j) \quad (23)$$

$\Rightarrow$  divergence de l'estimateur quand  $\tau \rightarrow 0$ .

- Empiriquement: bruit, "bid-ask bounce" et autres effets de microstructure

# Plan de la séance

- 1 Distribution des rendements
  - Observations empiriques
  - Quelques distributions utiles
  - Exemples de calibration
- 2 Corrélation des rendements et volatilité
  - Observations empiriques
  - Marche aléatoire et théorème central limite
  - Subordination et changement de temps
- 3 Volatilité et corrélations en haute-fréquence
  - Volatilité et "signature plots"
  - Corrélation et effet Epps

# Covariance (I)

- Deux processus de prix d'actifs  $p^1$  et  $p^2$
- Cadre Black & Scholes / semi-martingales d'Itô :

$$\langle p^1, p^2 \rangle_T = \int_0^T \rho_u \sigma_u^1 \sigma_u^2 du \quad (24)$$

$$\langle p^1, p^2 \rangle_T = \lim_{\tau \rightarrow 0} \sum_{j=1}^{T/\tau} (p^1(j\tau) - p^1((j-1)\tau))(p^2(j\tau) - p^2((j-1)\tau))$$

## Covariance (II)

- Estimateur de covariance réalisée :

$$\hat{C}_\tau = \sum_{j=1}^{T/\tau} (p^1(j\tau) - p^1((j-1)\tau))(p^2(j\tau) - p^2((j-1)\tau)) \quad (25)$$

$$= \sum_{j=1}^{T/\tau} r_\tau^1(j) r_\tau^2(j) \quad (26)$$

- Consistance :

$$\hat{C}_\tau \rightarrow \langle p^1, p^2 \rangle_T \text{ en probabilité quand } \tau \rightarrow 0. \quad (27)$$

- Synchronisation nécessaire... et pourtant, transactions/cotations asynchrones !

# Effet Epps (I)

Epps (1979): “Correlations among price changes [...] are found to decrease with the length of the interval for which the price changes are measured.”

<i>Pairs of Stocks</i>						
<i>Interval</i>	<i>AMC- Chrysler</i>	<i>AMC- Ford</i>	<i>AMC- GM</i>	<i>Chrysler- Ford</i>	<i>Chrysler- GM</i>	<i>Ford- GM</i>
10 minutes	.001	.009	-.009	-.014	.007	.055
20 minutes	.009	.018	.011	.017	.026	.118
40 minutes	.006	.012	.014	.041	.040	.197
One hour	-.043	.057	.064	.023	.065	.294
Two hours	.029	.060	.094	.112	.129	.383
Three hours	.031	.158	.111	.361	.518	.519
One day	-.067	.170	.078	.342	.442	.571
Two days	-.020	.223	.186	.336	.449	.572
Three days	-.098	.203	.100	.334	.542	.645

**Figure:** Corrélations des log-rendements pour quatre actifs (AMC, Chrysler, Ford, GM) pour 125 jours ouvrés au premier semestre 1971. Tiré de (Epps, 1979).



# Effet Epps (II)

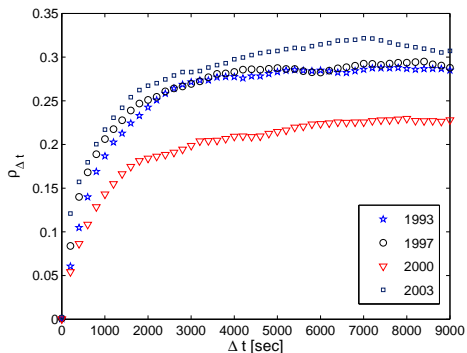


Figure: Corrélations des log-rendements pour de Coca-Cola et Pepsi en fonction de la période d'échantillonnage pour les années 1993, 1997, 2000 et 2003. Tiré de (Toth & Kertesz, 2007).

# Effet Epps (III)

Plusieurs explications proposées :

- effet “lead-lag” pour les titres d’un même secteur
- asynchronicité des transactions
- effet de “tick” et autres effets de microstructure

# Estimateur de Hayashi et Yoshida (I)

## Référence

**On covariance estimation of non-synchronously observed diffusion processes**, Takaki Hayashi, Nakahiro Yoshida, *Bernoulli*, Volume 11, Number 2 (2005), 359-379.

- Soient  $t_i^1$  la  $i$ -ème observation du prix  $p^1$  et  $t_j^2$  la  $j$ -ème observation du prix  $p^2$ .
- On note  $I^i = ]t_{i-1}^1, t_i^1]$  l'intervalle entre les observations  $i - 1$  et  $i$  du prix  $p^1$ , et  $J^j = ]t_{j-1}^2, t_j^2]$  l'intervalle entre les observations  $j - 1$  et  $j$  du prix  $p^2$ .

# Estimateur de Hayashi et Yoshida (II)

- Les variations de prix s'écrivent:

$$\Delta p^1(I^i) = p(t_i^1) - p(t_{i-1}^1), \quad \Delta p^2(J^j) = p(t_j^2) - p(t_{j-1}^2), \quad (28)$$

- On construit l'estimateur de covariance :

$$\hat{C}^{HY} = \sum_{i,j} \Delta p^1(I^i) \Delta p^2(J^j) \mathbf{1}_{I^i \cap J^j \neq \emptyset} \quad (29)$$

- Consistance: si  $p$  semi-martingale,  $\hat{C}^{HY} \rightarrow \int_0^T \rho_u \sigma_u^1 \sigma_u^2 du \langle p^1, p^2 \rangle_T$
- Recherche active en cours (Griffin & Oomen, 2011)

# Estimateur de Hayashi et Yoshida (III)

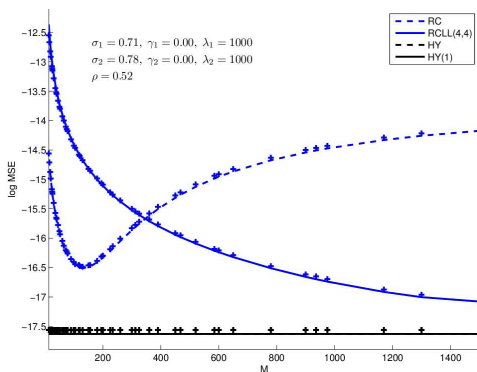


Figure: RMSE d'estimateurs de covariance réalisée ( $RC = \hat{C}_T$  et  $HY = \hat{C}^{HY}$ ) pour des données simulées et échantillonnées par un processus de Poisson. Tiré de (Griffin & Oomen, 2011).

# En résumé

Quelques notions-clés:

- Données, prix, fréquence, échelle d'observation
- Faits stylisés: rendements non corrélés, queues de distribution épaisses
- Faits stylisés: "clustering" de volatilité, "leverage"
- Marche aléatoire et théorème central limite
- Subordination, temps de transactions, temps événementiel
- Corrélation, données asynchrones et effet Epps
- Effets/bruit de microstructure et haute fréquence

# Références

- Bollerslev, T., Litvinova, J., Tauchen, G. (2007) Leverage and Volatility Feedback Effects in High-Frequency Data, *Journal of Financial Econometrics*, **4** (3):353–384.
- Clark, P.K. (1973), A Subordinated Stochastic Process Model with Finite Variance for Speculative Prices, *Econometrica*, **41** (1):135–155.
- Epps, T.W. (1979), Comovements in Stock Prices in the Very Short Run, *Journal of the American Statistical Association*, **74**:291–298.
- Gnedenko, B.V., Kolmogorov, A.N. (1968), *Limit distributions for sums of independent random variables*, Rev.ed., Addison-Wesley.
- Griffin, J.E., Oomen, R.C.A. (2011), Covariance measurement in the presence of non-synchronous trading and market microstructure noise, *Journal of Econometrics*, **160** (1):58–68.

# Références

- Hayashi, T., Yoshida, N. (2005), On covariance estimation of non-synchronously observed diffusion processes, *Bernoulli*, **11** (2):359–379.
- Mandelbrot, B. (1963), The Variation of Certain Speculative Prices, *The Journal of Business*, **36** (4):394–419.
- Silva, A.C., Yakovenko, V.M. (2007), Stochastic volatility of financial markets as the fluctuating rate of trading: An empirical study, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **382** (1):278–285.
- Tóth, B., Kertész, J. (2007), On the origin of the Epps effect, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **383** (1):54–58.